МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»

Т.В. КРЮКОВА

МАТЕМАТИКА

(ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

Методическое пособие для студентов специальности
«Экономика и бухгалтерский учет по отраслям»
дневной формы обучения

Рубцовск 2015

УДК 517.9

Крюкова Т.В. Математика (дифференциальное исчисление функции одной переменной): Методическое пособие для студентов специальности «Экономика и бухгалтерский учет по отраслям» дневной формы обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2015. - 42 с.

Предлагаемая методическая разработка содержит теоретический материал по одному из разделов математики «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». В работе приведено большое количество примеров, которые являются образцами решения задач по данному разделу, также прилагаются тестовые задания. Рекомендовано студентам экономических направлений очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ВМФиХ Рубцовского индустриального института
Протокол №9 от 27.05.2015г.

Рецензент: к.т.н., доцент А.В. Шашок

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ПОНЯТИЮ ПРОИЗВОДНОЙ

1. **Задача о касательной**. Пусть на плоскости *Oxy* дана непрерывная кривая $y = f(x)$ и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 1.1).

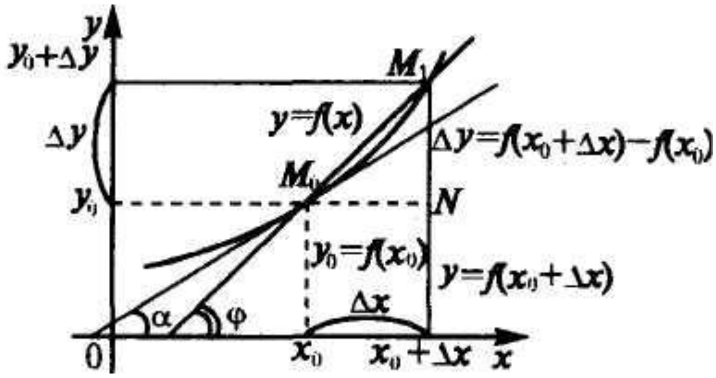

Рис. 1.1

Прежде всего необходимо выяснить, что мы будем понимать под касательной и кривой. Касательную нельзя определить как прямую, имеющую с кривой одну общую точку. В самом деле, прямая (1) на рис. 1.2, а имеет одну общую точку с кривой (2), но не является касательной к ней. А прямая (3) на рис. 1.2, б хотя имеет две общие точки с кривой (4), очевидно, касается ее в точке *A*. Поэтому для определения касательной к кривой должен быть реализован другой подход.

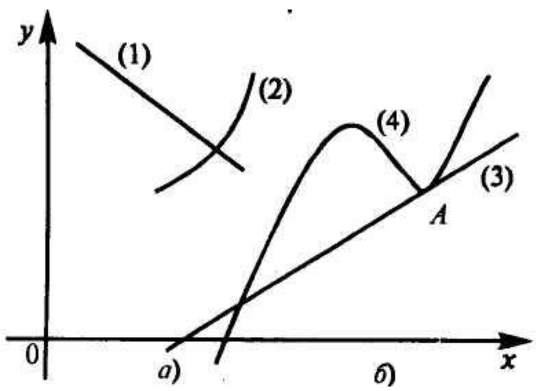

Рис. 1.2

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0; f(x_0))$ к точке $M_1(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$э проведем секущую M_0M_1 (см. рис. 1.1).

Под *касательной к кривой* $y = f(x)$ *в точке* M_0 естественно понимать предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0 M_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1.1)$$

Оставим на время задачу о касательной и рассмотрим другую задачу.

2. **Задача о скорости движения**. Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $s = s(t)$, где s – пройденный путь, t – время, и необходимо найти скорость точки в момент t_0.

К моменту времени t_0 пройденный путь равен $s_0 = s(t_0)$, а к моменту $(t_0 + \Delta t)$ - путь $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$ (рис. 1.3).

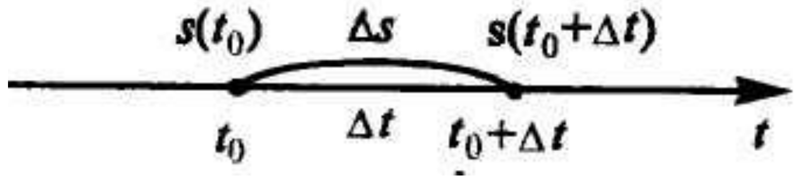

Рис. 1.3

Тогда за промежуток Δt средняя скорость будет $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент t_0. Поэтому под *скоростью точки в момент* t_0 естественно понимать предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (1.2)$$

3. **Задача о производительности труда.** Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t, и необходимо найти производительность труда в момент t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что *производительность труда в момент* t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Рассматривая три различные по характеру задачи, мы пришли к пределу (1.1) - (1.3) одного вида. Этот предел играет чрезвычайно важную роль в математическом анализе, являясь основным понятием дифференциального исчисления.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке *X*. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. ***Производной функции*** $y = f(x)$ *называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.1)$$

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$. Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется ***дифференцируемой*** *в этой точке.* Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка *X*, называется *дифференцируемой на* этом *промежутке.*

Теперь вернемся к рассмотренным выше задачам.

Из задачи о касательной вытекает ***геометрический смысл производной****: производная* $f'(x_0)$ *есть* ***угловой коэффициент*** *(тангенс угла наклона)* ***касательной,*** *проведенной к кривой* $y = f(x)$ *в точке* x_0, т.е. $k = f'(x_0)$.

Тогда уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ *в* точке x_0 примет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.2)$$

Из задачи о скорости движения следует *механический смысл* ***производной:*** *производная пути по времени* $s'(t_0)$ *есть* ***скорость*** *точки в момент* t_0*:* $v(t_0) = s'(t_0)$.

Из задачи о производительности труда следует, что *производная объема произведенной продукции по времени* $u(t_0)$ *есть производительность труда в момент* t_0.

Пример 1. График функции $y = f(x)$ есть полуокружность (рис. 2.1). Используя геометрический смысл производной, найти значения производной $f'(x)$ в точках *A, B, C, D, E,* делящих полуокружность на четыре равные части.

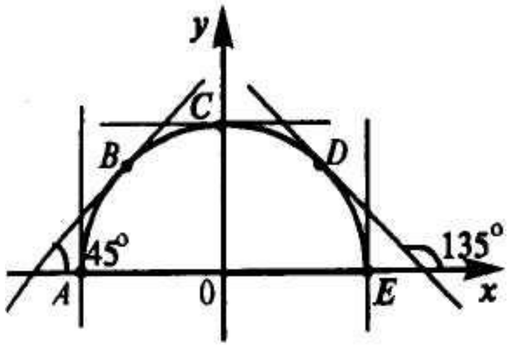

Рис. 2.1

Решение. В точках B и D углы наклона касательных к графику составляют соответственно 45° и 135°, поэтому $y'_B = tg45^0 = 1$, $y'_D = tg135^0 = -1$.

В точке C касательная параллельна оси Ox(α=0), поэтому $y'_C = tg0 = 0$. В точках A и E касательные перпендикулярны к оси Ox, $\alpha = 90^0$, tg90° — не существует, т.е. функция $f(x)$ недифференцируема в этих точках, точнее — производная в этих точках бесконечна: $f'_A = +\infty$, $f'_E = -\infty$ (знаки, стоящие перед символами бесконечности, определяются тем, что в окрестности точки A производная $f'(x)$ положительна (острый угол наклона касательных), а в окрестности точки E — отрицательна (тупой угол наклона).

Пример 2. Доказать, что функция $y = |x|$ недифференцируема в точке x=0.

Решение. Производная функция (если она существует) равна $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$.

Очевидно, что при x=0 производная не существует, так как отношение $\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ равно 1 при $\Delta x > 0$ и —1 при $\Delta x < 0$, т.е. не имеет предела при $\Delta x \to 0$ (ни конечного, ни бесконечного). Геометрически это означает отсутствие касательной к кривой в точке x=0.

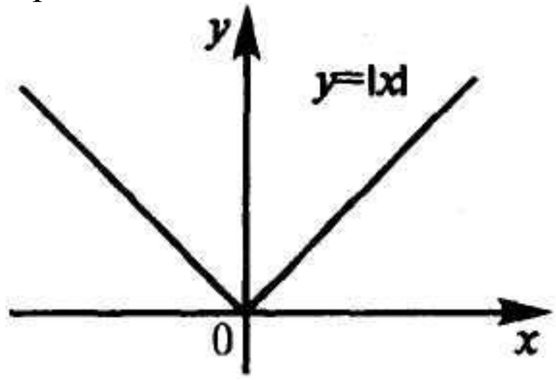

Рис. 2.2

Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.*

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

где $f'(x_0)$ — постоянная величина, не зависящая от Δx.

Тогда на основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \tag{2.3}$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$ или

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \tag{2.4}$$

При $\Delta x \to 0$ на основании свойств бесконечно малых устанавливаем, что $\Delta y \to 0$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ в точке x_0 является непрерывной.

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке x=0, ибо $\lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0$ (рис. 2.2), но, как было доказано в примере 2, недифференцируема в этой точке.

Таким образом, *непрерывность функции — необходимое, но недостаточное условие дифференцируемости функции.*

В математике известны непрерывные функции, недифференцируемые ни в одной точке.

Замечание. Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке *X,* то функция называется *гладкой* на этом промежутке. Если же производная функция допускает конечное число точек разрыва (причем первого рода), то такая функция на данном промежутке называется *кусочно гладкой.*

3. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Производная функции $y = f(x)$ может быть найдена по следующей схеме:

1°. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем наращенное значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2°. Находим приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3°. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

4°. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (если этот предел существует).

Пример 3. Найти производную функции $y = x^3$.

Решение.

1°. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем наращенное значение функции $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$.

2°. Находим приращение функции $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right)$.

3°. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$.

4°. Находим предел $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2$.

Итак, мы получили, что $\left(x^3\right)' = 3x^2$. Можно доказать, что для любого (не только натурального) n

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}. \tag{3.1}$$

Полезно знать частные случаи этой формулы при $n = \frac{1}{2}$ и $n = -1$:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{3.3}$$

Пример 4. Найти производную функции $y = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$.

Решение. Представим функцию $y = x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{11}{4}}$.

Теперь по формуле (3.1) $y' = \frac{11}{4} x^{\frac{7}{4}}$.

Пример 5. Составить уравнение касательной к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

Решение. В соответствии с (2.2) уравнение касательной к кривой $y = f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. По формуле (3.3) найдем производную $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Ее значение при $x = 1$ $f'(1) = -1$. Значение функции при $x = 1$ $f(1) = 1$. Уравнение касательной $y - 1 = -1(x - 1)$ или $x + y - 2 = 0$ (рис. 3.1).

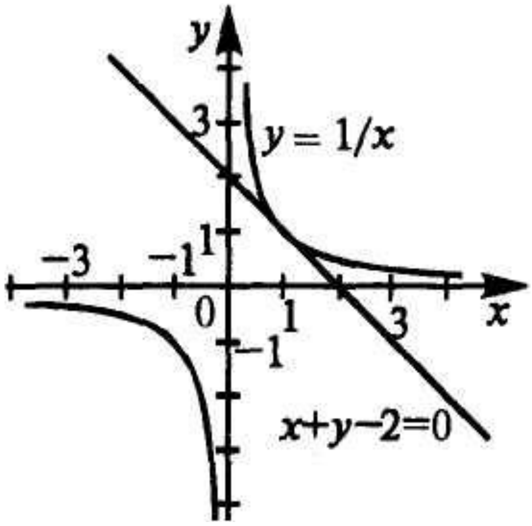

Рис. 3.1

Правила дифференцирования

1. *Производная постоянной равна нулю,* т.е.

$$c'=0.$$

Правило очевидно, так как любое приращение постоянной функции $y=c$ равно нулю.

2. *Производная аргумента равна* 1, т.е.
правило следует из формулы (3.1) при $n=1$.

В следующих правилах будем полагать, что $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — дифференцируемые функции.

3. *Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций,* т.е.

$$(u+v)'=u'+v'. \tag{3.4}$$

4. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго,* т.е.

$$(uv)'=u'v+uv'. \tag{3.5}$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$(cu)'=cu'. \tag{3.6}$$

Следствие 2. *Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные,* например:

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'. \tag{3.7}$$

5. *Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \tag{3.8}$$

(при условии, что $v\neq 0$).

В качестве примера докажем правило 4, т.е. формулу (3.5). Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — дифференцируемые функции. Найдем производную функции $y=uv$, используя схему, приведенную в начале.

1. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функции u и v получат наращенные значения $u+\Delta u$ и $v+\Delta v$, а функция y – значение $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$.

2. Найдем приращение функции
$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=uv+\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\Delta v-uv=\Delta u\cdot v+u\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v.$$

3. Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, которое представим в виде
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x.$$

4. Найдем предел этого соотношения при $\Delta x\to 0$, используя теоремы о пределах
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x.$$
На основании определения производной получили, что
$$y'=u'v+uv'+u'v'\cdot 0 \qquad \text{или} \qquad y'=u'v+uv'.$$

Пример 6. Найти производную функции $y=f(x)$ и вычислить ее значение в точке $x=1$:

а) $y=x^3\left(\sqrt[4]{x}+1\right)$; б) $y=15\left(x^4-1\right)$; в) $y=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}}$.

Решение.

а) По формулам (3.5), (3.4) и (3.1)
$$y'=\left(x^3\right)'\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)+x^3\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)'=3x^2\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)+x^3\left(\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}+0\right)=$$
$$=x^2\left(\frac{13}{4}\sqrt[4]{x}+1\right).$$

Значение производной в точке $x=1$ есть $y'(1)=1\left(\dfrac{13}{4}\cdot 1+1\right)=4,25$.

б) Сначала вынесем постоянный множитель за знак производной:
$$y'=15\left(x^4-1\right)'=15\cdot 4x^3=60x^3; \qquad y'(1)=60.$$

в) По формуле (3.8)
$$y'=\frac{\left(x^3-1\right)'\sqrt{x}-\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{5x^3+1}{2x\sqrt{x}};$$
$$y'(1)=3.$$

4. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЙ

Пусть переменная y есть функция от переменной $u\big(y = f(u)\big)$, а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x, т.е. задана **сложная** функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$.

Теорема. *Если* $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ *— дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x,* т.е.

$$y' = f'(u)\cdot u'. \tag{4.1}$$

Дадим независимой переменной x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функции $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ соответственно получат приращение Δu и Δy.

Предположим, что $\Delta u \neq 0$. Тогда в силу дифференцируемости функции $y = f(u)$ можно записать

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u),$$

где $f'(u)$ — величина, не зависящая от Δu.

На основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u),$$

где $\alpha(\Delta u)$ — бесконечно малая при $\Delta u \to 0$, откуда

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u. \tag{4.2}$$

Это равенство будет справедливо и при $\Delta u = 0$, если полагать, что $\alpha(\Delta u = 0) = 0$ (т.е. доопределить таким образом функцию $\alpha(\Delta u)$ при $\Delta u = 0$).

Разделив обе части равенства (4.2) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{4.3}$$

Так как по условию функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема, то она непрерывна в точке *x*, следовательно, при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ и $\alpha(\Delta u) \to 0$.

Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве (4.3), получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\cdot u'.$$

З а м е ч а н и е. Если ограничиться случаями, что при $\Delta x \neq 0$, $\Delta u \neq 0$, доказательство теоремы можно провести проще, исходя из очевидного равенства $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и переходя в нем к пределу при $\Delta x \to 0$.

Правило дифференцирования сложной функции (4.1) может быть записано и в других формах: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Выше мы привели формулы для производной степенной функции $y = x^n$ и ее частных случаев (формулы (3.1) – (3.3)).

С учетом полученного правила дифференцирования сложной функции (4.1) для функции $y = u^n$, где $u = u(x)$, можно записать

$$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u', \tag{4.4}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \tag{4.5}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'. \tag{4.6}$$

Пример 7. Найти производные функции:

а) $y = \left(\sqrt{x} + 5\right)^3$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; в) $y = \dfrac{12}{x^2+x+1}$.

Решение. а) Функцию можно представить в виде $y = u^3$, где $u = \sqrt{x} + 5$. Поэтому на основании формулы (4.4)

$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3\left(\sqrt{x}+5\right)^2\left(\sqrt{x}+5\right)' = \frac{3\left(\sqrt{x}+5\right)^2}{2\sqrt{x}}.$$

б) Имеем $y = \sqrt[3]{u}$, где $u = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, поэтому по формулам (4.1) и (4.4)

$$y' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot u' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\,\frac{2x\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{2\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)^2}}.$$

в) Вынося постоянный множитель 12 за знак производной и используя (4.6), получим

$$y' = 12\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)' = 12\left(-\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\right)\left(x^2+x+1\right)' = \frac{-12(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Т е о р е м а. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, т.е.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \qquad (4.7)$$

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема и $y'(x) = f'(x) \neq 0$.

Пусть $\Delta y \neq 0$ - приращение независимой переменной y, Δx - соответствующее приращение обратной функции $x = \varphi(y)$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}. \qquad (4.8)$$

Переходя к пределу в равенстве (4.8) при $\Delta y \to 0$ и учитывая, что в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x)}, \text{ т.е. } x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Формула (4.7) имеет простой геометрический смысл. Если y'_x выражает тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ к оси *Ox*, то x'_y - *тангенс угла* β *наклона той же касательной к оси Oy*, причем $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (если α и β - острые углы) (рис. 4.1) или $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ (если α и β - тупые углы). Для таких

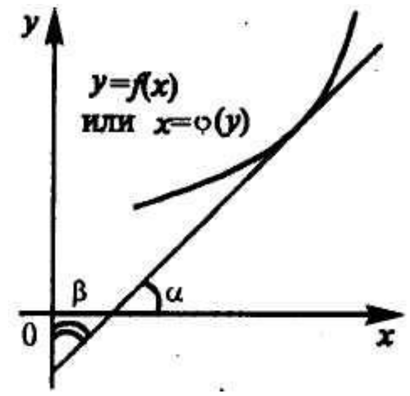

Рис 4.1

углов $tg\beta = ctg\alpha$, или $tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$. Этому равенству и равносильно условие $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

5. ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Введем формулы производных основных элементарных функций.

Производная логарифмической функции.

а) $y = \ln x$. Воспользуемся схемой нахождения производной.

1. $y+\Delta y=\ln\left(x+\Delta x\right)$.

2. $\Delta y=\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x=\ln\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

Обозначив $\dfrac{\Delta x}{x}=y$, найдем $\Delta x=xy$ и

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{xy}\ln\left(1+y\right)=\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\ln\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}.$$

В силу непрерывности логарифмической функции меняем местами символы предела и логарифма, а затем используем определение числа *е*; получим

$$y'=\frac{1}{x}\ln\left[\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}\right]=\frac{1}{x}\ln e-\frac{1}{x}.$$

Итак,

$$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}\ \text{ и }\ \left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}\cdot u'.$$

б) $y=\log_a x$. Найдем $y'=\left(\log_a x\right)'=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{\ln a}\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, т.е.

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}\ \text{ и }\ \left(\log_a u\right)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u' \qquad (5.1)$$

Производная показательной функции. а) $y=e^x$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию *е*, получим $\ln y=x$. Дифференцируя обе части по переменной *х* и учитывая, что $\ln y$ - сложная функция, получим с учетом (4.1) $\left(\ln y\right)'=x'$, или $\dfrac{y'}{y}=1$, откуда $y'=y$, т.е.

$$\left(e^x\right)'=e^x\ \text{ и }\ \left(e^u\right)'=e^u\cdot u'. \qquad (5.2)$$

Заметим, что кривая $y=e^x$, называемая *экспонентой*, обладает отличающим только её свойством: в каждой точке *х* ордината кривой $y=e^x$ равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной к кривой в этой точке: $e^x=tg\alpha$ (рис. 5.1).

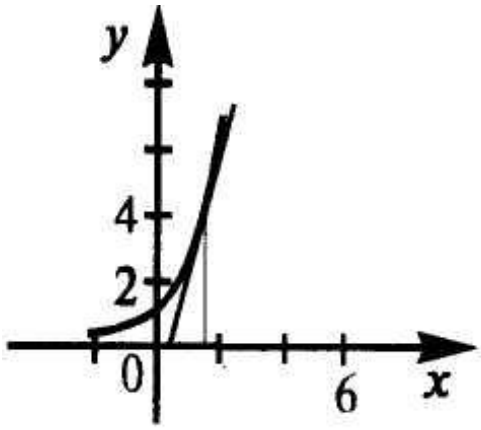

Рис. 5.1

б) $y = a^x$.

$y' = \left(a^x\right)' = \left[\left(e^{\ln a}\right)^x\right]' = \left(e^{x\ln a}\right)'$ и по правилу дифференцирования сложной функции (4.1)

$y' = e^{x\ln a}\left(x\ln a\right)' = a^x \cdot \ln a$. Итак,

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \text{ и } \left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'. \qquad (5.3)$$

Производные тригонометрических функций. а) $y = \sin x$.

Воспользуемся схемой нахождения производной

1. $y + \Delta y = \sin\left(x + \Delta x\right)$.
2. $\Delta y = \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.
4. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ (учли первый замечательный предел и непрерывность функции $\cos x$).

Итак,

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \text{ и } \left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'. \qquad (5.4)$$

б) $y = \cos x$.

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x \text{ и } \left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u' \qquad (5.5)$$

(доказательств аналогично п. а).

в) $y = tgx$.

$y' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\left(\sin x\right)'\cos x - \sin x\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, т.е.

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x} \text{ и } (tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'. \qquad (5.6)$$

г) $y=ctgx$.

$$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x};\ (ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u' \qquad (5.7)$$

(доказательство аналогично п. в).

д) $y=\arcsin x$, где $-1\le x\le 1$ и $-\pi/2\le y\le \pi/2$.

Обратная функция имеет вид $x=\sin y$, причем $x'_y=\cos y\neq 0$, если $-\pi/2\le y\le \pi/2$.

Используем правило дифференцирования обратной функции (4.7)

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $x=\pm 1$ производной не существует.

Итак,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } (\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'. \qquad (5.8)$$

е) $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$.

Вывод формул аналогично п. д) – формулы соответствующих производных приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Таблица производных

I. $y=C;\ y'=0$.	VIII. $y=ctgx;\ y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.
II. $y=x^n;\ y'=nx^{n-1}$.	IX. $y=\arcsin x;\ y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
III. $y=a^x;\ y'=a^x\ln a$.	X. $y=\arccos x;\ y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
III'. $y=e^x;\ y'=e^x$.	XI. $y=arctgx;\ y'=\frac{1}{1+x^2}$.
IV. $y=\log_a x;\ y'=\frac{1}{x\ln a}$.	XII. $y=arcctgx;\ y'=-\frac{1}{1+x^2}$.
IV'. $y=\ln x;\ y'=\frac{1}{x}$.	XIII. $y=shx;\ y'=chx$.
V. $y=\sin x;\ y'=\cos x$.	XIV. $y=chx;\ y'=shx$.
VI. $y=\cos x;\ y'=-\sin x$.	XV. $y=thx;\ y'=\frac{1}{ch^2 x}$.
VII. $y=tgx;\ y'=\frac{1}{\cos^2 x}$.	XVI. $y=cthx;\ y'=-\frac{1}{sh^2 x}$.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала функции, которое играет важную роль как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

Вспомним определение производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $y = f(x)$,

тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α - бесконечно малая величина, отсюда следует $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Далее, так как $\Delta x \to 0$, $\alpha \to 0$, то $\Delta x \cdot \alpha \to 0$ - бесконечно малая величина второго порядка, а $y' \cdot \Delta x$ - главное слагаемое.

Определение:

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главное слагаемое (главная часть) приращения функции, линейное относительно Δx.

Обозначим: d – дифференциал, тогда по определению

$$dy = y' \cdot \Delta x. \qquad (6.1)$$

Заменяем Δx на dx, тогда $dy = y' \cdot dx$, следовательно, $y' = \frac{dy}{dx}$ (читается dy по dx).

Пример 8. $y = x^3 \cdot \cos x$.

$$dy = \left(x^3 \cdot \cos x\right)' \cdot dx = \left(3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x)\right)dx =$$
$$= x^2 \cdot (3\cos x - x \sin x)dx.$$

Пример 9. $y = 2^x \cdot \ln x$.

$$dy = \left(2^x \cdot \ln x\right)' \cdot dx = \left(2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \cdot \frac{1}{x}\right)dx.$$

Пример 10. $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.

$$dy = \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x}\right)' dx =$$
$$= \frac{-\sin x \cdot (1 - \sin x) + \cos x}{(1 - \sin x)^2} =$$
$$= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx = \frac{dx}{1 - \sin x}.$$

Пример 11. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$$dy = \left(\frac{x^2}{\ln x} \right) dx =$$

$$= \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} dx = \frac{x \cdot (2\ln x - 1)}{\ln^2 x} dx.$$

7. ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ПРОИЗВОДНАЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее производной:

$$y'' = \left[f'(x) \right]'. \qquad (7.1)$$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее второй производной:

$$y''' = \left[f''(x) \right]' \text{ и т.д.} \qquad (7.2)$$

Производная n-го порядка (n-я производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее $(n-1)$-й производной:

$$y^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'. \qquad (7.3)$$

Пример 12. Найти третью производную от функции $y = x\ln 2x$ в точке $x = 2$.

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим:

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1.$$

Дифференцируя производную y', найдем:

$$y'' = (y')' = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, третья производная

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}.$$

При $x = 2$ имеем $y'''(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Заметим, второй производной функции $y = f(x)$, или производной второго порядка, называется производная от ее производной. Обозначается вторая производная: y'' или $f''(x)$, т.е. $y'' = (y')'$.

Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала первого порядка.

Пусть дана функция $y = f\left(x\right)$, тогда дифференциал функции по определению равен $dy = y' \cdot dx$, следовательно, дифференциал второго порядка по определению равен $d^2 y = d\left(dy\right)$, следовательно, $d^2 y = d\left(y' \cdot \Delta x\right) = y'' dx^2$, т.е.

$$d^2 y = y'' \cdot dx^2. \qquad (8.1)$$

Пример 13. $y = \dfrac{x}{x+5}$**.**

$$y' = \frac{x+5-x}{\left(x+5\right)^2} = \frac{5}{\left(x+5\right)^2},$$

$$y'' = \left(\frac{5}{\left(x+5\right)^2}\right)' = \frac{-5\left(\left(x+5\right)^2\right)'}{\left(x+5\right)^4} = \frac{-10 \cdot \left(x+5\right)}{\left(x+5\right)^4} = -\frac{10}{\left(x+5\right)^3},$$

$$d^2 y = -\frac{10}{\left(x+5\right)^3} dx^2.$$

9. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти *y'* из уравнения *y*=*f*(*x*), то можно:

1) логарифмировать обе части уравнения (по основанию *e*): $\ln y = \ln f(x) = \phi(x)$;

2) дифференцировать обе части полученного равенства, где ln*y* есть сложная функция от *x*: $\dfrac{y'}{y} = \phi'(x)$;

3) заменить *y* выражением через *x* и определить *y'*: $y' = y \cdot \phi'(x) = f(x) \cdot \phi'(x)$.

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции $y = u^v$, где *u, v* – функции от *x*.

Пример 14. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^{\left(x^2+1\right)}$;

б) $y = \left(\cos x\right)^{\sin 2x}$;

в) $y = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$;

г) $y = \left(x+2\right) \cdot \sqrt[3]{\left(x-1\right)^2 \left(x+4\right)}$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, находим:

а) $y = x^{\left(x^2+1\right)}$:

1) $\ln y = \ln x^{\left(x^2+1\right)}$;

$\ln y = \left(x^2+1\right)\cdot \ln x$;

2) $\dfrac{y'}{y} = \left(x^2+1\right)'\cdot \ln x + \left(x^2+1\right)\cdot \dfrac{1}{x} = 2\ln x + \dfrac{x^2+1}{x}$;

3) $y' = y\left(2x\ln x + \dfrac{x^2+1}{x}\right) = x^{\left(x^2+1\right)}\left(2x\ln x + \dfrac{x^2+1}{x}\right)$.

б) $y = \left(\cos x\right)^{\sin 2x}$;

1) $\ln y = \ln\left(\cos x\right)^{\sin 2x}$:

$\ln y = \sin 2x\cdot \ln\left(\cos x\right)$;

2) $\dfrac{y'}{y} = \left(\sin 2x\right)'\cdot \ln\left(\cos x\right) + \sin 2x\cdot \dfrac{\left(\cos x\right)'}{\cos x} = 2\cos 2x\cdot \ln\left(\cos x\right) - \dfrac{\sin 2x\cdot \sin x}{\cos x}$;

3) $y' = y\cdot\left(2\cos 2x\cdot \ln\left(\cos x\right) - \dfrac{2\sin^2 x\cdot \cos x}{\cos x}\right) = \left(\cos x\right)^{\sin 2x}\times$

$\times\left(2\cos 2x\cdot \ln\left(\cos x\right) - 2\sin^2 x\right)$.

в) $y = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$:

1) $\ln y = \ln \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$;

$\ln y = \ln\left(2x^2\right) - \ln\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\ln y = \ln\left(2x^2\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^3\right)$.

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\left(2x^2\right)'}{2x^2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(1+x^3\right)'}{1+x^3} = \dfrac{4x}{2x^2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3x^2}{1+x^3} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{1+x^3}$.

3) $y' = y\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{1+x^3}\right) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\cdot\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{1+x^3}\right)$.

г) $y = \left(x+2\right)\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2\left(x+4\right)}$:

1) $\ln y = \ln\left(\left(x+2\right)\cdot\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}\cdot\sqrt[3]{x+4}\right)$.

$\ln y = \ln\left(x+2\right) + \ln\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2} + \ln\sqrt[3]{x+4}$.

$\ln y = \ln\left(x+2\right) + \dfrac{2}{3}\ln\left(x+1\right) + \dfrac{1}{3}\ln\left(x+4\right)$.

2) $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{(x+2)'}{x+2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(x-1)'}{x-1}+\dfrac{1}{3}\dfrac{(x+4)'}{x+4}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+4}$.

3) $y'=y\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{3(x-1)}+\dfrac{1}{3(x+4)}\right)=\left((x+2)\sqrt[3]{(x-1)^2(x+4)}\right)\times$

$\times\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{3(x-1)}+\dfrac{1}{3(x+4)}\right).$

10. ПРОИЗВОДНЫЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Если y есть неявная функция от x, т.е. задана уравнением $f(x,y)=0$, неразрешенным относительно y, то для нахождения производной $\dfrac{dy}{dx}$ нужно продифференцировать по x обе части неравенства, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное равенство относительно производной. Как правило, она будет зависеть от x и y; $\dfrac{dy}{dx}=\phi(x,y)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\phi(x,y)}{dx}=F\left(x,\ y,\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right). \qquad (10.1)$$

Заменяя $\dfrac{dy}{dx}$ чрез $\phi(x,y)$, получим выражение второй производной через x и y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F\left[x,y,\phi(\mathrm{x,y})\right]=\psi(x,y). \qquad (10.2)$$

Точно так же и все высшие производные от неявной функции можно выразить через x и y: каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная $\dfrac{dy}{dx}$, ее следует заменять через $\phi(x,y)$.

Пример 15. Для данных неявных функций найти производные указанного порядка.

а) $e^{x-2}+yx-3y-2=0;\quad \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=2}-?$

б) $x^y=y^x\ \dfrac{dx}{dy}-?$

в) $t-s+arctgx=0\quad s''-?$

Решение.

а) Дифференцируя по x и считая y функцией от x, найдем

$$e^{x-2}+y'\cdot x+y\cdot x'-3y'=0.$$

$$e^{x-2}+y'\cdot x+y-3y'=0.$$

$$y'\cdot x+(-3y')=-y-e^{x-2}.$$

$$y'\left(x-3\right)=-y-e^{x-2}.$$

$$y'=\frac{y+e^{x-2}}{3-x}.$$

Подставляя данное по условию значение x=2 в полученное уравнение, получим:

$y'_{x=2}=\dfrac{y_{x=2}+e^{0}}{3-2}$, остается найти $y_{x=2}$. Для этого воспользуемся исходным уравнением

$$e^{0}+y\cdot 2-3y-2=0.$$

$$-y+1-2=0.$$

$$-y-1=0.$$

$$-y=1,\quad y=-1.$$

y=-1, тогда $y'_{x=2}=\dfrac{-1+1}{1}=0.$

б) Логарифмируем обе части уравнения, затем дифференцируем по y, рассматривая x как функцию от y:

$$\ln x^{y}=\ln y^{x}$$

$$y\cdot\ln x=x\cdot\ln y$$

$$y'\ln x+y\cdot\left(\ln x\right)'=x'\cdot\ln y+x\cdot\left(\ln y\right)'$$

$$\ln x+y\cdot\frac{x'}{x}=x'\cdot\ln y+x\cdot\frac{1}{y}.$$

Выразим x':

$$y\cdot\frac{x'}{x}-x'\cdot\ln y=\frac{x}{y}-\ln x$$

$$x'\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)=\frac{x}{y}-\ln x$$

$$x'=\left(\frac{x}{y}-\ln x\right):\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)$$

$$x' = \frac{x - y\ln x}{y} : \frac{y - x\ln y}{x}$$

$$x' = \frac{x - y\ln x}{y} : \frac{x}{y - x\ln y}$$

$$x' = \frac{x\left(x - y\ln x\right)}{y\left(y - x\ln y\right)}.$$

в) Дифференцируем уравнение по t, считая s функцией от t:

$$t' - s' + \frac{s'}{1+s^2} = 0$$

$$1 - s' + \frac{s'}{1+s^2} = 0$$

$$\frac{s'}{1+s^2} - s' = -1$$

$$s'\left(\frac{1}{1+s^2} - 1\right) = -1,$$

$$s'\left(\frac{1-1-s^2}{1+s^2}\right) = -1,$$

$$s'\left(\frac{-s^2}{1+s^2}\right) = -1,$$

$$s' = \frac{-1}{\left(\frac{-s^2}{1+s^2}\right)}, \quad s' = \frac{1+s^2}{s^2}, \quad s' = \frac{1}{s^2} + 1,$$

$$s' = s^{-2} + 1.$$

Последнее равенство снова дифференцируем по t и находим s'':

$$s'' = \left(s^{-2}\right) + 0$$

$$s'' = -2s^{-3} \cdot s'.$$

Заменяем s' на $s^{-2}+1$, получим:

$$s'' = -2s^{-3}\left(s^{-2} + 1\right)$$

$$s'' = -2s^{-5} - 2s^{-3}$$

$$s'' = -\frac{2}{s^5} - \frac{2}{s^3}$$

$$s'' = \frac{-2\left(s^2 + 1\right)}{s^5}.$$

11. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если функция y от независимой переменной x задана через посредство вспомогательной переменной (параметра t):

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \phi(t) \end{cases},$$

то производные y по x определяются по формулам:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{11.1}$$

Все эти формулы составлены по одному общему правилу: производная от параметрически заданной величины y по независимо переменной x равна отношению производных от y и от x, взятых по параметру t.

Пример 16. Для следующих функций, заданных параметрически, найти указанные производные:

а) $\begin{cases} x = 2\sin t + \sin 2t, \\ y = 3\cos t + \cos 3t. \end{cases}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

б) $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln\left(t + 1.\right) \end{cases}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - ?$

в) $\begin{cases} x = 1 + e^{\alpha\phi}, \\ y = a\phi + e^{-\alpha\phi}. \end{cases}$ $\quad \dfrac{d^3y}{dx^3} - ?$

Решение.

а) Находим производные y и x по t:

$$\frac{dy}{dt} = 3\left(-\sin t\right) - 3\sin 3t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t + 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{2\cos t + 2\cos 2t} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + 2\cos 2t}.$$

б) Находим производные y и x по t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 2; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{t+1}}{2t+2} = \frac{1}{2\left(t+1\right)\left(t+1\right)} = \frac{1}{2\left(t+1\right)^2} = \frac{1}{2}\left(t+1\right)^{-2}.$$

Далее находим производную от y' по t, а затем искомую вторую производную от y по x как отношение производных от y' и от x по t:

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{1}{2}(-2)(t+1)^{-3}(t+1)'; \quad \frac{dy'}{dt}=-(t+1)^{-3}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{(t+1)^{-3}}{2(t+1)}=-\frac{1}{2(t+1)^4}.$$

в) Пользуясь формулами (11.1), получим:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{a-e^{-\alpha\phi}a}{ae^{\alpha\phi}}=\frac{1\text{-}e^{\alpha\phi}}{e^{\alpha\phi}}=e^{-\alpha\phi}\text{-}e^{-2\alpha\phi},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{\text{-a}e^{-\alpha\phi}+2ae^{-2\alpha\phi}}{ae^{\alpha\phi}}=\text{-}e^{-2\alpha\phi}+2e^{-3\alpha\phi},$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{\frac{dy''}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{2ae^{-2\alpha\phi}-6e^{-3\alpha\phi}}{ae^{\alpha\phi}}=2e^{-3\alpha\phi}-6e^{-4\alpha\phi}.$$

12. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭКОНОМИКЕ

Было установлено, что производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее *экономический смысл производной.*

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx — прирост продукции, тогда Δy — приращение издержек производства и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** *производства и характеризует приближенно дополнительны затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) x и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены *предельная выручка, предельный* *доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и другие предельные величины.

Применение дифференциального исчисления к исследованию экономических объектов и процессов на основе анализа этих предельных величин получило название *предельного анализа.* Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины), а *процесс, изменение экономического объекте* Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.* Следует учесть, однако, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих объектов экономических расчетов и прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). Вместе с тем в ряде случаев можно отвлечься от дискретности показателей и эффективно использовать предельные величины.

Рассмотрим в качестве примера **соотношения между средним[1] и предельным доходом[1]** в условиях монопольного и конкурентное рынков.

Суммарный доход (выручку) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на количество продукции q, т.е. $r = pq$.

В условиях монополии одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции, а следовательно, цены на них. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса $p(q)$ — есть линейная убывающая функция $p = aq + b$, где $a < 0$, $b > 0$. Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит $r = (aq+b)q = aq^2 + bq$ (рис. 12.1). В этом случае средний доход на единицу продукции $r_{ср} = \frac{r}{q} = aq + b$, а предельный доход, т.е. дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции, составит $r_q^{'} = 2aq + b$ (рис. 2.5). Следовательно, *в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с меньшей скоростью) среднего дохода.*

---

[1] В экономической литературе п р е д е л ь н ы е величины называют также маржинальными. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква *М;* при записи с р е д н и х величин добавляется буква *А* (от англ *average* — средняя). Например, *MR* — предельный доход, *АК* — средний доход.

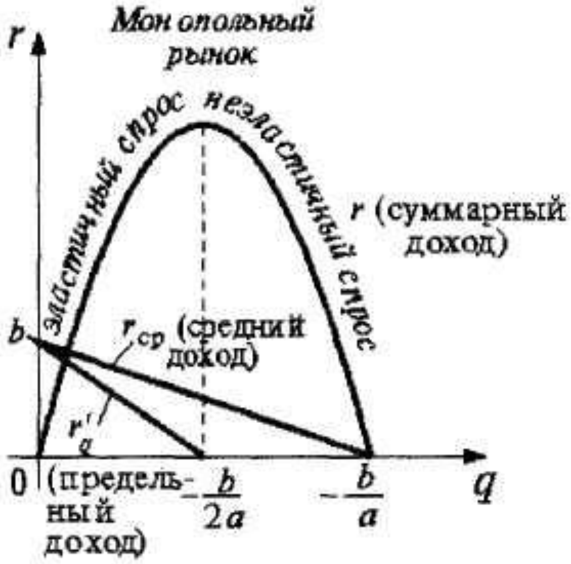

Рис. 12.1

В условиях с о в е р ш е н н о й к о н к у р е н ц и и , когда число участников рынка велико и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, устойчивая продажа товаров возможна по преобладающей рыночной цене, например, $p=b$. При этом суммарный доход составит $r = pq$ и соответственно средний доход $r_{cp} = \frac{r}{q} = b$ и предельный доход $r_q^{'} = b$ (рис. 12.2).

Таким образом, *в условиях свободного конкурентного рынка* в отличие от монопольного *средний и предельный доходы совпадают.*

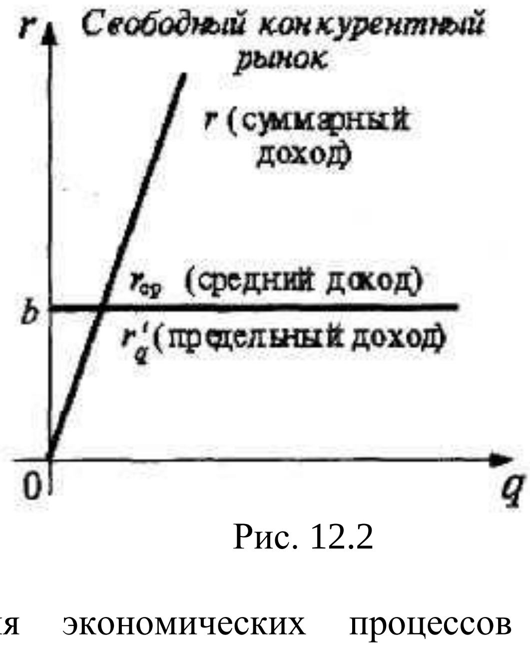

Рис. 12.2

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие **эластичности функции.**

О п р е д е л е н и е . ***Эластичностью функции*** *$E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при* $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \qquad (12.1)$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Выясним геометрический смысл эластичности функции. По определению (12.3)

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} tg\alpha,$$

где $tg\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x, y)$ (рис. 12.3). учитывая, что из треугольника MBN $MN = x\ tg\alpha$, $MC=y$, а из подобия треугольников MBN и AMC $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$, получим $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$, т.е. *эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек ее пересечения с осями Ох* и *Оу*. Если точки пересечения касательной к графику функции *А* и *В* находятся по одну сторону от точки *М,* то эластичность $E_x(y)$ положительна (рис. 12.3), если по разные стороны, то $E_x(y)$ отрицательна (рис. 12.4).

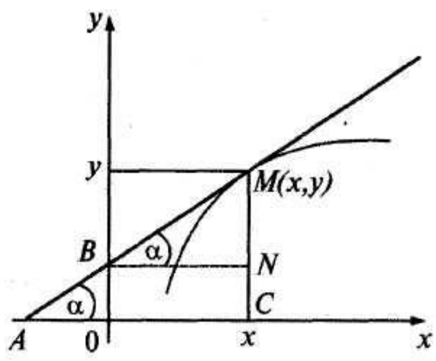

Рис. 12.3

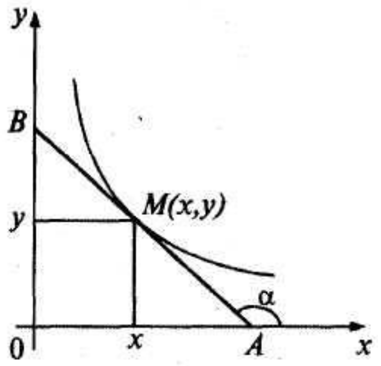

Рис. 12.4

Отметим свойства эластичности функции.

1. *Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е.

$$E_x(y)=xT_y. \qquad (12.2)$$

2. *Эластичность произведения (частного)* двух *функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \qquad (12.3)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v). \qquad (12.4)$$

3. *Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:*

$$E_x(y)=\frac{1}{E_y(x)}. \qquad (12.5)$$

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Например, эластичность спроса y относительно цены x (или дохода x) — коэффициент, определяемый по формуле (12.1) и показывающий приближенно, на сколько процентов изменится спрос (объем потребления) при изменении цены (или дохода) на 1%.

Если эластичность спроса (по абсолютной величине) $|E_x(y)|>1$, то спрос считают *эластичным,* если $|E_x(y)|<1$ — *неэластичным* относительно цены (или дохода). Если $|E_x(y)|=1$, то говорят о спросе *с единичной эластичностью.*

Выясним, например, как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход $r=pq$ при реализации продукции. Выше мы предполагали, что кривая спроса $p = p(q)$ — линейная функция; теперь будем полагать, что $p=p(q)$ — произвольная функция. Найдем предельный доход

$$r'_q=(pq)'_q=p'_q\cdot q+p\cdot 1=p\left(1+\frac{q}{p}p'_q\right)=p\left(1+E_q(p)\right).$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (2.43) для эластичности взаимно обратных функций эластичность спроса относительно цены обратна эластичности цены относительно спроса, т.е. $E_q(p)=\frac{1}{E_p(q)}$, а также то, что $E_p(q)<0$, получим при п р о и з в о л ь н о й кривой спроса

$$p'_q=p\left(1-\frac{1}{|E_p(q)|}\right). \qquad (12.6)$$

Если спрос неэластичен, т.е. $|E_p(q)|<1$, то в соответствии с (12.6) предельный доход r'_q о т р и ц а т е л е н при любой цене; если спрос эластичен, т.е. $|E_p(q)|>1$, то предельный доход r'_q п о л о ж и т е л е н . Таким образом, для неэластичного спроса изменения цены и предельного дохода происходят в одном направлении, а для эластичного спроса — в разных. Это означает, что *с возрастанием цены для продукции эластичной спроса суммарный доход от реализации продукции увеличивается, а для товаров неэластичного спроса — уменьшается.* На рисунке 12.1 на кривых доходов выделены области эластичного и неэластичного спроса.

Пример 17. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x — 0{,}05\,x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

Решение. Функция средних издержек (на единицу продукции) выражается отношением $y_{ср}=\frac{y}{x}=50-0{,}05x^2$; при $x = 10$ средние издержки (на единицу продукции) равны $y_{cp}(10)=50-0,05\cdot10^2=45$ (ден. ед.). Функция предельных издержек выражается производной $y'(x)$ = 50-0,15x^2; при x = 10 предельные издержки составят $y'(10)$ = 50-0,15-10^2 = 35 (ден. ед.). Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден. ед.

Пример 18. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y=-0,5x+80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение. Эластичность себестоимости

$$E_x(y)=\frac{-0,5x}{-0,5x+80}=\frac{x}{x-160}.$$

При x=60 $E_{x=60}(y)=-0,6$, т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб, увеличение его на 1% привел к снижению себестоимости на 0,6%.

Пример 19. Объем продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u=-\frac{5}{6}t^3+\frac{15}{2}t^2+100t+50$ (ед.), $1\le t\le 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда выражается производной

$$z(t)=u'(t)=-\frac{5}{2}t^2+15t+100 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

а скорость и темп изменения производительности – соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z(t)=\left[\ln z(t)\right]'$:

$$z'(t)=-5t+15 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$T_z(t)=\frac{z'(t)}{z(t)}=\frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100}=\frac{2t-6}{t^2-6t-40} \text{ (ед./ч)}.$$

В заданные моменты времени $t_1=1$ и $t_2=8-1=7$ соответственно имеем: $z(1)=112,5$ (ед./ч), $z'(1)=10$ (ед./ч^2), $T_z(1)=0,09$ (ед./ч) и $z(7)=82,5$ (ед./ч), $z'(7)=-20$ (ед./ч^2), $T_z(7)=-0,24$ (ед./ч).

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и $T_z(t)$ с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.

13. ТЕСТЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ СТУДЕНТОВ

Вариант №1.

1. Найдите производную функции $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}$.

Варианты ответов: 1) $2\sqrt[3]{x}$; 2) $\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $3\sqrt{x}$; 4) $-\frac{3}{2\sqrt{x}}$; $\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0=1$: $f(x)=\frac{5^{\sqrt{x}}}{arctg^2 x}-5$.

Варианты ответов: 1) $\frac{40(\pi-8)}{\pi^3}$; 2) $\frac{40(\pi\ln 5-8)}{\pi^3}$; 3) $\frac{40(\pi\ln 5+8)}{\pi^3}$;

4) $\frac{40(\ln 5-8)}{\pi^3}$; 5) $\frac{40(\pi\ln 5-8)}{\pi^2}$.

3. Найдите производную функции: $f(x)=x^2tg(3x+1)$.

Варианты ответов: 1) $2tg(3x+1)+\frac{x^2}{\cos^2(3x+1)}$;

2) $2tg(3x+1)+\frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$; 3) $xtg(3x+1)+\frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$;

4) $2xtg(3x+1)+\frac{3x^2}{\sin^2(3x+1)}$; 5) $2xtg(3x+1)+\frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x=\cos t; \\ y=t+\sin t. \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $-\frac{1+\cos t}{\sin t}$; 2) $\frac{1+\cos t}{\sin t}$; 3) $-\frac{1-\cos t}{\sin t}$;

4) $-\frac{\sin t}{1+\cos t}$; 5) $\frac{\sin t}{1+\cos t}$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^3+y^3=2xy$.

Варианты ответов: 1) $\frac{x^2-y}{x-y^2}$; 2) $\frac{3x^2-2y}{2x-3y^2}$; 3) $\frac{y-x^2}{x-y^2}$;

4) $\frac{x^2-2y}{2x-y^2}$; 5) $\frac{3x^2-y}{x-3y^2}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x)=(x^2+5x+4)^3$.

Варианты ответов:

1) $3(x^2+5x+4)^2\,dx$; 2) $3(x^2+5x+4)^2\,2xdx$; 3) $3(x^2+5x+4)^2(2x+5)dx$;

4) $\left(x^2+5x+4\right)^2 dx$; 5) $3\left(x^2+5x+4\right)^2(2x+5)dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x)=x^2\ln x$.

Варианты ответов: 1) $2x$; 2) $2\ln x+3$; 3) $2x\ln x$; 4) $2\ln x+2$; 5) $2\ln x$.

Вариант №2.

1. Найдите производную функции $f(x)=2\sqrt[5]{x^6}+4x$.

Варианты ответов: 1) $2\sqrt[5]{x}+4$; 2) $\frac{12}{5}\sqrt[5]{x}+4$; 3) $\frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$;

4) $\frac{12}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+4$; 5) $\frac{6}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0=1$: $f(x)=\frac{5^{\sqrt{x}}}{arctg^2 x}+5$.

Варианты ответов: 1) $\frac{40(\pi-8)}{\pi^3}$; 2) $\frac{40(\pi\ln 5-8)}{\pi^3}$; 3) $\frac{40(\pi\ln 5+8)}{\pi^3}$;

4) $\frac{40(\ln 5-8)}{\pi^3}$; 5) $\frac{40(\pi\ln 5-8)}{\pi^2}$.

3. Найдите производную функции: $f(x)=x^2 ctg(2x+1)$.

Варианты ответов: 1) $2xctg(2x+1)-\frac{2x^2}{\sin^2(2x+1)}$;

2) $3x^2ctg(2x+1)+\frac{2x^3}{\sin^2(2x+1)}$; 3) $xctg(2x+1)+\frac{3x^2}{\cos^2(2x+1)}$;

4) $3x^2ctg(2x+1)-\frac{2x^3}{\sin^2(2x+1)}$; 5) $2xtg(2x+1)+\frac{3x^2}{\cos^2(2x+1)}$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x=-\cos t; \\ y=t+\sin t. \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $-\frac{1+\cos t}{\sin t}$; 2) $\frac{1+\cos t}{\sin t}$; 3) $-\frac{1-\cos t}{\sin t}$;

4) $-\frac{\sin t}{1+\cos t}$; 5) $\frac{\sin t}{1+\cos t}$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^3+y^3=2xy$.

Варианты ответов: 1) $\frac{3x^2-2y}{2x-3y^2}$; 2) $\frac{3x^2-2}{y^2}$; 3) $\frac{x^2}{2-y^2}$;

4) $\frac{3x^2}{2-3y^2}$; 5) $\frac{3x^2-y}{3y^2}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x)=\left(x^2+5x+4\right)^4$.

1) $4\left(x^2+5x+4\right)^3dx$; 2) $4\left(x^2+5x+4\right)^3dx$; 3) $4\left(x^2+5x+4\right)^3(2x+5)dx$;

4) $\left(x^2+5x+4\right)^3dx$; 5) $4\left(x^2+5x+4\right)^3(2x+5)dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x)=2x\ln x$.

Варианты ответов: 1) $\frac{2}{x}$; 2) $2(\ln x+1)$; 3) $2x\ln x$; 4) $\frac{1}{x}$; 5) $2\ln x$.

Вариант №3.

1. Найдите производную функции $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt[5]{x^6}-\frac{1}{2}$.

Варианты ответов: 1) $\frac{3}{5}\sqrt[5]{x}$; 2) $\frac{12}{5}\sqrt[5]{x}$; 3) $\frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$;

4) $\frac{12}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$; 5) $\frac{6}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0=1$: $f(x)=\frac{3^{\sqrt{x}}}{arctg^2x}-3$.

Варианты ответов: 1) $\frac{24(\pi-8)}{\pi^3}$; 2) $\frac{24(\pi\ln 3-8)}{\pi^3}$; 3) $\frac{24(\pi\ln 3+8)}{\pi^3}$;

4) $\frac{24(\ln 3-8)}{\pi^3}$; 5) $\frac{24(\pi\ln 3-8)}{\pi^2}$.

3. Найдите производную функции: $f(x)=2x^4\sin(2x+1)$.

Варианты ответов: 1) $8x^3\sin(2x+1)$;

2) $4x^4\cos(2x+1)$; 3) $8x^3\sin(2x+1)+2x^4\cos(2x+1)$;

4) $8x^3\cos(2x+1)$; 5) $8x^3\sin(2x+1)+4x^4\cos(2x+1)$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases}x=-\cos(t+1);\\ y=t+\sin(t+1).\end{cases}$

Варианты ответов: 1) $-\frac{1+\cos(t+1)}{\sin(t+1)}$; 2) $\frac{1+\cos t}{\sin t}$; 3) $\frac{1+\cos(t+1)}{\sin(t+1)}$;

4) $-\frac{\sin t}{1+\cos t}$; 5) $\frac{\sin(t+1)}{1+\cos(t+1)}$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^3+y^3=2xy$.

Варианты ответов: 1) $\frac{3x^2y}{2-3y^2}$; 2) $\frac{3x^2}{2-y^2}$; 3) $\frac{x^2y}{2-y^3}$;

4) $\dfrac{3x^2-2y}{2x-3y^3}$; 5) $\dfrac{3x^2y}{2-3y^3}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$.

1) $\dfrac{1}{2(x+1)}dx$; 2) $\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$; 3) $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x+1)}}dx$;

4) $\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$; 5) $\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x)=2x\ln(2x)$.

Варианты ответов: 1) $\dfrac{2}{x}$; 2) $2(\ln(2x)+1)$; 3) $2x\ln(2x)$; 4) $\dfrac{1}{x}$; 5) $2\ln(2x)$.

Вариант №4.

1. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{x^7}$.

Варианты ответов: 1) $\dfrac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$; 2) $\dfrac{7}{10}\sqrt[5]{x^2}$; 3) $\dfrac{7}{5}\sqrt[5]{x}$;

4) $\dfrac{7}{10}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$; 5) $\dfrac{5}{14}\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0=1$: $f(x)=\dfrac{3^{\sqrt{x}}}{arctg^2x}-3$.

Варианты ответов: 1) $\dfrac{24(\pi-8)}{\pi^3}$; 2) $\dfrac{24(\pi\ln3-8)}{\pi^3}$; 3) $\dfrac{24(\pi\ln3+8)}{\pi^3}$;

4) $\dfrac{24(\ln3-8)}{\pi^3}$; 5) $\dfrac{24(\pi\ln3-8)}{\pi^2}$.

3. Найдите производную функции: $f(x)=x^5\sin(3x+1)$.

Варианты ответов: 1) $5x^4\sin(3x+1)$;

2) $3x^5\cos(3x+1)$; 3) $5x^4\sin(3x+1)+3x^5\cos(3x+1)$;

4) $5x^4\cos(3x+1)$; 5) $5x^4\sin(3x+1)+x^5\cos(3x+1)$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x=\cos(2t+1); \\ y=t+\sin(2t+1). \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $-\dfrac{1+2\cos(2t+1)}{2\sin(2t+1)}$; 2) $\dfrac{1+2\cos2t}{2\sin2t}$;

3) $\dfrac{1+2\cos(2t+1)}{2\sin(2t+1)}$; 4) $-\dfrac{2\sin t}{1+2\cos t}$; 5) $-\dfrac{2\sin(2t+1)}{1+2\cos(2t+1)}$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^2+y^2=2\ln y$.

Варианты ответов: 1) $\frac{x}{1-y^2}$; 2) $\frac{xy}{1-y^2}$; 3) $\frac{xy}{1+y^2}$;

4) $\frac{x}{1+y^2}$; 5) $\frac{xy}{1-y}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x)=\sqrt{\ln(2x+1)}$.

1) $\frac{1}{(2x+1)}dx$; 2) $\frac{2}{(2x+1)\sqrt{\ln(2x+1)}}dx$; 3) $\frac{1}{\sqrt{\ln(2x+1)}}dx$;

4) $\frac{1}{(2x+1)\sqrt{\ln(2x+1)}}$; 5) $\frac{1}{(2x+1)\sqrt{\ln(2x+1)}}dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x)=x\ln(2x)$.

Варианты ответов: 1) $\frac{2}{x}$; 2) $2(\ln(2x)+1)$; 3) $2x\ln(2x)$; 4) $\frac{1}{x}$; 5) $2\ln(2x)$.

Вариант №5.

1. Найдите производную функции $f(x)=2\sqrt[5]{x^7}$.

Варианты ответов: 1) $\frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$; 2) $\frac{14}{5}\sqrt[5]{x^2}$; 3) $\frac{7}{5}\sqrt[5]{x}$;

4) $\frac{14}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$; 5) $\frac{14}{5}\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0=1$: $f(x)=\frac{3^{\sqrt{x}}}{arctg^3 x}-8$.

Варианты ответов: 1) $\frac{96(\pi-12)}{\pi^4}$; 2) $\frac{96(\pi\ln3-12)}{\pi^3}$; 3) $\frac{96(\pi\ln3+12)}{\pi^4}$;

4) $\frac{96(\ln3-8)}{\pi^4}$; 5) $\frac{96(\pi\ln3-12)}{\pi^4}$.

3. Найдите производную функции: $f(x)=x^5\cos(3x+1)$.

Варианты ответов: 1) $5x^4\sin(3x+1)$;

2) $-15x^4\sin(3x+1)$; 3) $5x^4\cos(3x+1)-3x^5\sin(3x+1)$;

4) $5x^4\cos(3x+1)$; 5) $5x^4\cos(3x+1)+5x^5\sin(3x+1)$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x=\cos(2t+1); \\ y=\sin(2t+1). \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $-ctg(2t+1)$; 2) $ctg(2t)$;

3) $ctg(2t+1)$; 4) $-tg(2t+1)$; 5) $-2tg(2t+1)$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^2-y^2=2\ln y$.

Варианты ответов: 1) $\frac{x}{1-y^2}$; 2) $\frac{xy}{1-y^2}$; 3) $\frac{xy}{1+y^2}$;

4) $\frac{x}{1+y^2}$; 5) $\frac{xy}{1-y}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x)=\sqrt{\ln(3x+1)}$.

1) $\frac{1}{(3x+1)}dx$; 2) $\frac{3}{2(3x+1)\sqrt{\ln(3x+1)}}dx$; 3) $\frac{3}{2\sqrt{\ln(3x+1)}}dx$;

4) $\frac{1}{2(3x+1)\sqrt{\ln(3x+1)}}$; 5) $\frac{1}{(3x+1)\sqrt{\ln(3x+1)}}dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x)=x+\ln(2x)$.

Варианты ответов: 1) $-\frac{1}{4x^2}$; 2) $1+\frac{1}{x}$; 3) $1+\frac{1}{2x}$; 4) $-\frac{1}{x^2}$; 5) $\frac{1}{x}$.

Вариант №6.

1. Найдите производную функции $f(x)=\frac{5}{\sqrt[5]{x^7}}$.

Варианты ответов: 1) $-\frac{25}{7}\sqrt[5]{x^{12}}$; 2) $-7\sqrt[5]{x^{12}}$; 3) $7\sqrt[5]{x^{12}}$;

4) $-7\frac{1}{\sqrt[5]{x^{12}}}$; 5) $\frac{25}{7}\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0=1$: $f(x)=\frac{3^{\sqrt{x}}}{arctg^3 x}-8$.

Варианты ответов: 1) $\frac{96(\pi-12)}{\pi^4}$; 2) $\frac{96(\pi\ln 3-12)}{\pi^3}$; 3) $\frac{96(\pi\ln 3+12)}{\pi^4}$;

4) $\frac{96(\ln 3-8)}{\pi^4}$; 5) $\frac{96(\pi\ln 3-12)}{\pi^4}$.

3. Найдите производную функции: $f(x)=x^{\ln x}$.

Варианты ответов: 1) $x^{\ln x-1}\ln x$;

2) $2x^{\ln x-1}\ln x$; 3) $2x^{\ln x}\ln x$;

4) $2x^{\ln x-1}$; 5) $2\ln x$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x=e^{2t}; \\ y=\sin t. \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $\frac{\cos t}{2e^{2t}}$; 2) $\frac{-\sin t}{e^{2t}}$; 3) $\frac{2e^{2t}}{-\sin t}$; 4) $\frac{2e^{2t}}{\sin t}$;
5) $\frac{-\sin t}{e^{2t}}$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^2+y^2=2e^y$.

Варианты ответов: 1) $\frac{x}{y+e^y}$; 2) $\frac{x}{y-e^y}$; 3) $\frac{x-e^y}{y}$;

4) $\frac{e^y-x}{y}$; 5) $\frac{x}{-y+e^y}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x)=\sqrt{\ln(2x-1)}$.

1) $\frac{1}{(2x-1)}dx$; 2) $\frac{1}{(2x-1)\sqrt{\ln(2x-1)}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{\ln(2x-1)}}dx$;

4) $\frac{1}{2(2x-1)\sqrt{\ln(2x-1)}}dx$; 5) $\frac{1}{(2x-1)\sqrt{\ln(2x-1)}}dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x)=2x-\ln(2x)$.

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{4x^2}$; 2) $1-\frac{1}{x}$; 3) $1-\frac{1}{2x}$; 4) $\frac{1}{x^2}$; 5) $-\frac{1}{x}$.

Вариант №7.

1. Найдите производную функции $f(x)=5\sqrt[5]{x^7}$.

Варианты ответов: 1) $\frac{25}{7}\sqrt[5]{x^2}$; 2) $7\sqrt[5]{x^2}$; 3) $\sqrt[5]{x}$;

4) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$; 5) $\frac{25}{7}\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0=1$: $f(x)=\frac{3^{x^2}}{arctg^3x}-8$.

Варианты ответов: 1) $\frac{384(\pi\ln 3+1)}{\pi^4}$; 2) $\frac{384(\pi\ln 3-1)}{\pi^4}$; 3) $\frac{384(\pi+1)}{\pi^4}$;

4) $\frac{16(\pi\ln 3+1)}{\pi^4}$; 5) $\frac{384(\pi\ln 3+1)}{\pi^3}$.

3. Найдите производную функции: $f(x)=x^6\cos(3x+1)$.

Варианты ответов: 1) $6x^5\sin(3x+1)$;

2) $-18x^5\sin(3x+1)$; 3) $6x^5\cos(3x+1)-3x^6\sin(3x+1)$;

4) $6x^5\cos(3x+1)$; 5) $6x^5\cos(3x+1)+3x^6\sin(3x+1)$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x = \sin(2t+1); \\ y = \cos(2t+1). \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $-ctg(2t+1)$; 2) $ctg(2t)$;
3) $ctg(2t+1)$; 4) $-tg(2t+1)$; 5) $-2tg(2t+1)$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^2 - y^2 = 2e^y$.

Варианты ответов: 1) $\frac{x}{y+e^y}$; 2) $\frac{x}{y-e^y}$; 3) $\frac{x-e^y}{y}$;

4) $\frac{e^y - x}{y}$; 5) $\frac{x}{-y+e^y}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x) = \sqrt{\ln(3x-1)}$.

1) $\frac{1}{(3x-1)}dx$; 2) $\frac{3}{2(3x-1)\sqrt{\ln(3x-1)}}dx$; 3) $\frac{3}{2\sqrt{\ln(3x-1)}}dx$;

4) $\frac{1}{2(3x-1)\sqrt{\ln(3x-1)}}$; 5) $\frac{1}{(3x-1)\sqrt{\ln(3x-1)}}dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x) = x - \ln(2x)$.

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{4x^2}$; 2) $1-\frac{1}{x}$; 3) $1-\frac{1}{2x}$; 4) $\frac{1}{x^2}$; 5) $-\frac{1}{x}$.

Вариант №8.

1. Найдите производную функции $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x^7}} + 200$.

Варианты ответов: 1) $\frac{9}{7}\sqrt[3]{x^{10}}$; 2) $7\sqrt[3]{x^{10}}$; 3) $-7x^3 \cdot \sqrt[3]{x}$;

4) $-7\frac{1}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^{10}}} + 200$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0 = 1$: $f(x) = \frac{3^{x^2}}{arctg^3 x} - 8$.

Варианты ответов: 1) $\frac{384(\pi\ln 3+1)}{\pi^4}$; 2) $\frac{384(\pi\ln 3-1)}{\pi^4}$; 3) $\frac{384(\pi+1)}{\pi^4}$;

4) $\frac{16(\pi\ln 3+1)}{\pi^4}$; 5) $\frac{384(\pi\ln 3+1)}{\pi^3}$.

3. Найдите производную функции: $f(x) = x^6 \cdot e^{\cos x}$.

Варианты ответов: 1) $x^5 \cdot e^{\cos x}(6 + x\sin x)$;

2) $6x^5 \cdot e^{\cos x}\sin x$; 3) $x^5 \cdot e^{\cos x}\left(6-\sin x\right)$;

4) $x^5 \cdot e^{\cos x}\left(6-x\sin x\right)$; 5) $x^5 \cdot e^{\cos x}\left(6-x\cos x\right)$.

4. Функция $y\left(x\right)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = \sin t. \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $\dfrac{\cos t}{2e^{2t}}$; 2) $\dfrac{-\cos t}{e^{2t}}$; 3) $\dfrac{2e^{2t}}{-\cos t}$; 4) $\dfrac{2e^{2t}}{\cos t}$;

5) $\dfrac{-\cos t}{2e^{2t}}$.

5. Функция $y\left(x\right)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^3 - y^3 = 3e^y$.

Варианты ответов: 1) $\dfrac{x^2}{y^2+e^y}$; 2) $\dfrac{x^2}{y^2-e^y}$; 3) $\dfrac{x^2-e^y}{y^2}$;

4) $\dfrac{e^y-x^2}{y^2}$; 5) $\dfrac{x^2}{-y^2+e^y}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f\left(x\right)=\sqrt{\ln\left(3x\right)}$.

1) $\dfrac{1}{3x}dx$; 2) $\dfrac{3}{2x\sqrt{\ln\left(3x\right)}}dx$; 3) $\dfrac{3}{2\sqrt{\ln\left(3x\right)}}dx$;

4) $\dfrac{1}{6x\sqrt{\ln\left(3x\right)}}$; 5) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln\left(3x\right)}}dx$.

7. Найдите $f''\left(x\right)$: $f\left(x\right)=5x-\ln\left(2x\right)$.

Варианты ответов: 1) $\dfrac{1}{4x^2}$; 2) $1-\dfrac{1}{x}$; 3) $1-\dfrac{1}{2x}$; 4) $\dfrac{1}{x^2}$; 5) $-\dfrac{1}{x}$.

Вариант №9.

1. Найдите производную функции $f\left(x\right)=\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^7}}$.

Варианты ответов: 1) $\dfrac{16}{7}\sqrt[4]{x^{11}}$; 2) $7\sqrt[4]{x^{11}}$; 3) $-7\sqrt[4]{x^{11}}$;

4) $-7\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0=1$: $f\left(x\right)=\dfrac{4^{x^2}}{arctg^2 x}+18$.

Варианты ответов: 1) $\dfrac{128\left(\pi\ln 4-2\right)}{\pi^4}$;2) $\dfrac{128\left(\pi-2\right)}{\pi^3}$; 3) $\dfrac{128\left(\ln 4-2\right)}{\pi^3}$;

4) $\frac{128(\pi\ln 4+2)}{\pi^3}$; 5) $\frac{128(\pi\ln 4-2)}{\pi^3}$.

3. Найдите производную функции: $f(x)=x^6\cdot e^{\sin x}$.

Варианты ответов: 1) $x^5\cdot e^{\sin x}(6+x\cos x)$;
2) $6x^5\cdot e^{\sin x}\cos x$; 3) $x^5\cdot e^{\sin x}(6-\cos x)$;
4) $x^5\cdot e^{\sin x}(6-x\cos x)$; 5) $x^5\cdot e^{\sin x}(6-x\sin x)$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x=e^{2t}; \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $\frac{\cos 2t}{e^{2t}}$; 2) $\frac{-\cos 2t}{e^{2t}}$; 3) $\frac{e^{2t}}{-\cos 2t}$; 4) $\frac{e^{2t}}{\cos 2t}$;
5) $\frac{-2\cos 2t}{e^{2t}}$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^3+y^3=3e^y$.

Варианты ответов: 1) $\frac{x^2}{y^2+e^y}$; 2) $\frac{x^2}{y^2-e^y}$; 3) $\frac{x^2-e^y}{y^2}$;

4) $\frac{e^y-x^2}{y^2}$; 5) $\frac{x^2}{-y^2+e^y}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x)=\sqrt{\ln(4x)}$.

1) $\frac{1}{4x}dx$; 2) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln(4x)}}dx$; 3) $\frac{4}{\sqrt{\ln(4x)}}dx$;
4) $\frac{1}{8x\sqrt{\ln(4x)}}$; 5) $\frac{1}{4x\sqrt{\ln(4x)}}dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x)=5x+\ln(2x)$.

Варианты ответов: 1) $-\frac{1}{4x^2}$; 2) $1+\frac{1}{x}$; 3) $1+\frac{1}{2x}$; 4) $-\frac{1}{x^2}$; 5) $\frac{1}{x}$.

Вариант №10.

1. Найдите производную функции $f(x)=\frac{6}{\sqrt[6]{x^7}}-10$.

Варианты ответов: 1) $-\frac{36}{7}x^2\cdot\sqrt[6]{x}$; 2) $-7x^2\cdot\sqrt[6]{x}$; 3) $7\sqrt[6]{x^{13}}$;
4) $-7\frac{1}{x^2\cdot\sqrt[6]{x}}$; 5) $7\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$.

2. Найдите производную функцию в точке $x_0 = 1$: $f(x) = \frac{4^{x^2}}{arctg^2 x} - 18$.

Варианты ответов: 1) $\frac{128(\pi \ln 4 - 2)}{\pi^4}$; 2) $\frac{128(\pi - 2)}{\pi^3}$;

3) $\frac{128(\ln 4 - 2)}{\pi^3}$; 4) $\frac{128(\pi \ln 4 + 2)}{\pi^3}$; 5) $\frac{128(\pi \ln 4 - 2)}{\pi^3}$.

3. Найдите производную функции: $f(x) = (2x)^{\ln(2x)}$.

Варианты ответов: 1) $\frac{x^{\ln(2x)} \ln(2x)}{x}$; 2) $\frac{(2x)^{\ln(2x)} \ln(2x)}{x}$;

3) $\frac{2\ln(2x)}{x}$; 4) $\frac{2(2x)^{\ln(2x)} \ln(2x)}{x}$; 5) $\frac{2(2x)^{\ln(2x)}}{x}$.

4. Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями, найдите производную y'_x: $\begin{cases} x = e^{2t} - 2; \\ y = \cos t. \end{cases}$

Варианты ответов: 1) $\frac{\sin t}{2e^{2t}}$; 2) $\frac{-\sin t}{e^{2t}}$; 3) $\frac{2e^{2t}}{-\sin t}$; 4) $\frac{2e^{2t}}{\sin t}$; 5) $\frac{-\sin t}{2e^{2t}}$.

5. Функция $y(x)$ задана неявно, найдите производную y'_x: $x^4 - y^4 = 4e^y$.

Варианты ответов: 1) $\frac{x^3}{-y^3 + e^y}$; 2) $\frac{x^3}{y^3 - e^y}$; 3) $\frac{x^3 - e^y}{y^3}$;

4) $\frac{e^y - x^3}{y^3}$; 5) $\frac{x^3}{y^3 + e^y}$.

6. Найдите дифференциал функции: $f(x) = \sqrt{\ln(2x-1) + 5}$.

1) $\frac{1}{(2x-1)} dx$; 2) $\frac{1}{(2x-1)\sqrt{\ln(2x-1)+5}} dx$; 3) $\frac{1}{\sqrt{\ln(2x-1)+5}} dx$;

4) $\frac{1}{2(2x-1)\sqrt{\ln(2x-1)+5}}$; 5) $\frac{1}{(2x-1)\sqrt{\ln(2x-1)+5}} dx$.

7. Найдите $f''(x)$: $f(x) = -10x - \ln(2x)$.

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{4x^2}$; 2) $1 - \frac{1}{x}$; 3) $1 - \frac{1}{2x}$; 4) $\frac{1}{x^2}$; 5) $-\frac{1}{x}$.

Крюкова Татьяна Владимировна

МАТЕМАТИКА
(ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

Методическое пособие для студентов специальности
«Экономика и бухгалтерский учет по отраслям» дневной формы обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 29.05.15. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 2,63. Тираж 30 экз. Зак. 151438. Рег. №69.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.